Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Geometria Analitica

Usualmente, nella geometria analitica si preferisce considerare vettori con punto iniziale coincidente con l'origine di $\mathbb{R}^2$

Quindi esiste corrispondenza biunivoca tra vettori del piano e punti $P \in \mathbb{R}^2$

Quindi ogni vettore viene definito attraverso una coppia ordinata

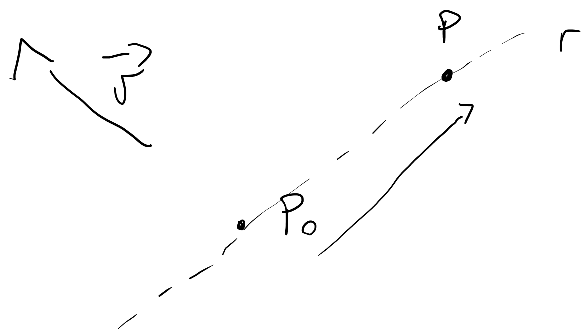
$$\vec{v} = (a, b) \qquad \left(\text{ossia } \vec{v} = \overrightarrow{OP},\ P \equiv (a,b)\right)$$

Fissato un punto del piano $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e un vettore $\vec{v} = (a, b)$ nel piano un postulato (euclideo) ci dice che esiste una ed una sola retta passante per P_0 e perpendicolare (ortogonale) al vettore $\vec{v}$

Denotiamo tale retta r

Un punto $P = (x, y) \in r \iff$

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{v}$$



poiché $\forall P \in r$ il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ ha come direzione r (quindi ortogonale a $\vec{v}$)

Condizione di perpendicolarità tra vettori

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

$\vec{v} = (a, b)$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$

$$\iff \quad a \cdot (x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

ossia (se $c = -a x_0 - b y_0$)

(*) $\boxed{ax + by + c = 0}$

Ossia un punto generico della retta r, $P = (x, y)$ deve soddisfare un'eq^{ne} lineare di 1° grado (*)

Viceversa Data un'eq^{ne} lineare di 1° grado

(E) $\quad ax + by + c = 0$

l'insieme dei punti del piano $P=(x,y)$ che verificano (E) descrivono una ed una sola retta del piano!

<u>OSS</u> Data l'eq.ne di una retta nel piano

$$r: \ ax+by+c=0$$

la coppia (a,b) ci da sempre un vettore perpendicolare alla retta r

In particolare, date due rette

$$r_1: \ a_1x+b_1y+c_1=0$$

$$r_2: \ a_2x+b_2y+c_2=0$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{v_1}=(a_1,b_2)\perp r_1 \quad , \quad \vec{v_2}=(a_2,b_2)\perp r_2$$

Quindi

$r_1 \parallel r_2$ (rette parallele)

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{v_1} \parallel \vec{v_2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\, k\in\mathbb{R},\ k\neq 0: \vec{v_1}=k\vec{v_2}$$

ossia

Condizione di parallelismo tra rette

$$\begin{cases} a_1 = k a_2 \\ b_1 = k b_2 \end{cases}$$

Sostituendo alle equazioni delle rette, si ha

$$r_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \longrightarrow \underbrace{k a_2 x + k b_2 y + c_1 = 0}_{\uparrow \text{ divido per } k}$$

$$r_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

otteniamo

$$r_1 : a_2 x + b_2 y + \frac{c_1}{k} = 0$$

$$r_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

ossia le rette $r_1 // r_2 \iff$ hanno stessi coeff. in x e y

Analogamente

$$r_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \qquad (\text{con associato } \vec{v_1} = (a_1, b_1) \perp r_1)$$

$$r_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \qquad (\text{con associato } \vec{v_2} = (a_2, b_2) \perp r_2)$$

Allora

$$r_1 \perp r_2 \iff \vec{v_1} \perp \vec{v_2}$$

$$\iff \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$$

$$\iff \boxed{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0}$$

condizione di perpendicolarità tra rette

Caso particolare

$r_1 : \quad y = m_1 x + p_1$

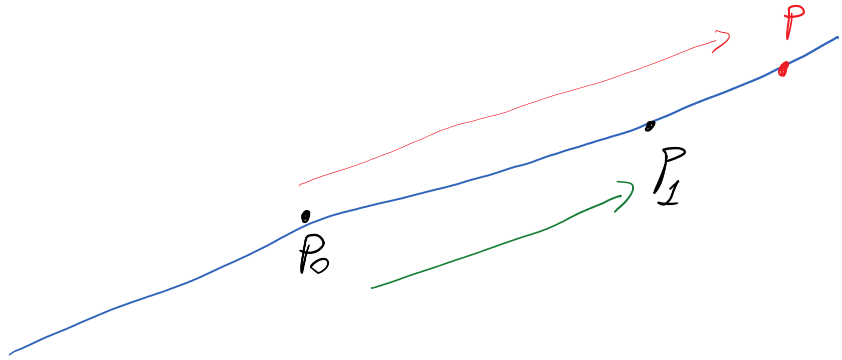
$r_2 : \quad y = m_2 x + p_2$

$$r_1 \perp r_2 \iff \boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$$

<u>Rette passanti</u> per 2 punti distinti

Siano $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_2)$
due punti distinti di $\mathbb{R}^2$
Un postulato euclideo ci dice che per P_0 e P_1
passa una ed una sola retta

Cerchiamo l'eq.ne di tale retta r



Nota che $\forall P \in r$ con $P = (x, y)$
deve accadere che

$$\overrightarrow{P_0P_1} \parallel \overrightarrow{P_0P}$$

$$\iff \exists\, k \in \mathbb{R} : \begin{cases} \underbrace{x-x_0}_{\text{1° coordinata di } \overrightarrow{P_0P}} = k\,\underbrace{(x_1-x_0)}_{\text{1° coordinata di } \overrightarrow{P_0P_1}} \\ y-y_0 = k\,(y_1-y_0) \end{cases}$$

dalla 1ª eq.ne $\quad k = \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$

dalla 2ª eq.ne $\quad k = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$

$\Longrightarrow$ Eq.ne della retta passante per P_0 e P_1

$$\boxed{\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}}$$

Ossia

$$(y-y_0)(x_1-x_0) = (x-x_0)(y_1-y_0)$$

$$(x_1-x_0)\,y = (y_1-y_0)\,x + [\underbrace{y_0(x_1-x_0) - x_0(y_1-y_0)}_{c\,\in\,\mathbb{R}}]$$

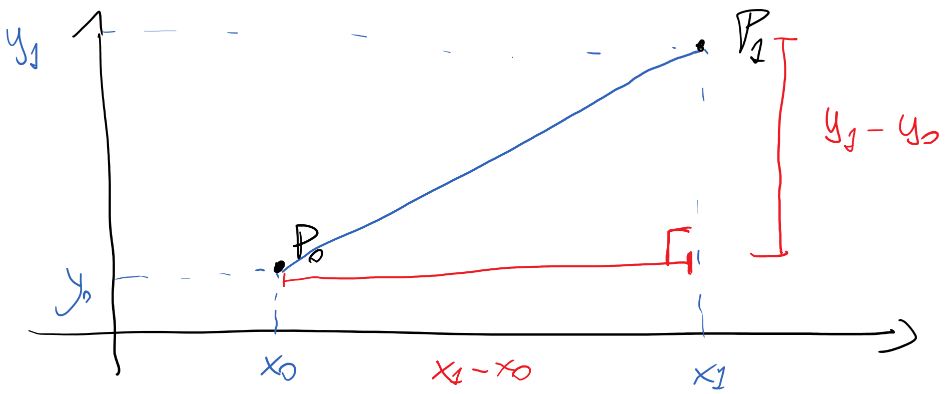
Ossia

$$\boxed{y = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot x + c}$$

con $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ = coeff. angolare della retta passante per $P_0 P_1$

Distanze :

(1) Distanza fra due punti: $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$



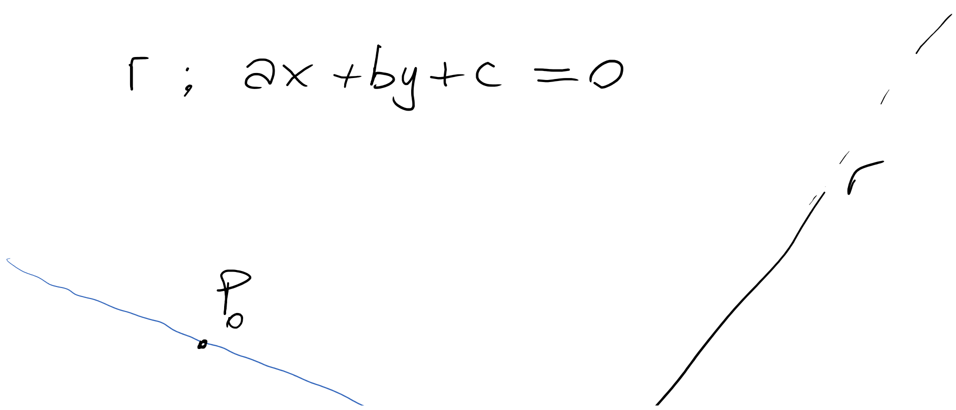
essendo che $d(P_0, P_1)$ coincide con lunghezza ipotenusa di un triangolo rettangolo

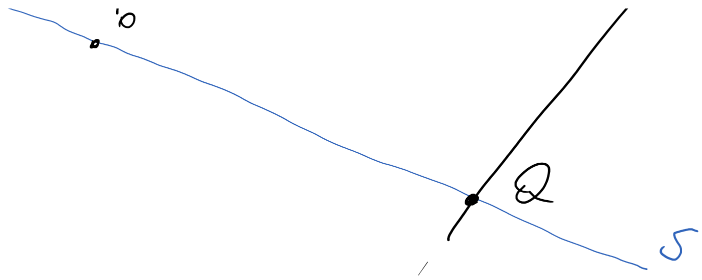
Pitagora $\Longrightarrow$ $$\boxed{d(P_0, P_1) = \sqrt{(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2}}$$

(2) Distanza punto retta

Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e una retta

$$r \; ; \; ax + by + c = 0$$





Si considera la retta s passante per P_0 $\perp$ r

Si considera il punto $Q = r \cap s$

Si definisca $d(P_0, r) = d(P_0, Q)$

In realtà, usando la definizione e la formula di distanza fra due punti

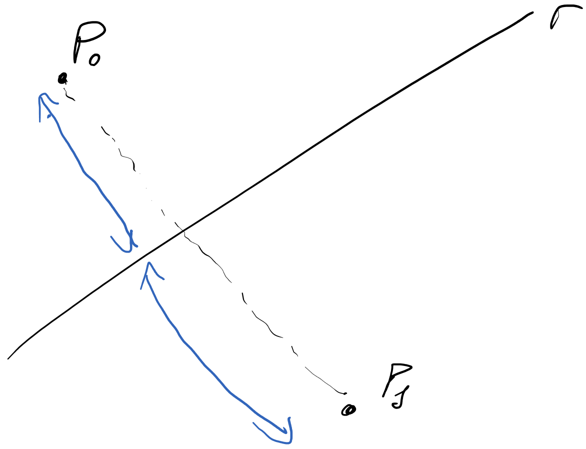
$$\boxed{d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Punto simmetrico rispetto ad una retta

Sia $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r : ax+by+c=0$ una retta

Definiamo punto P_1 simmetrico di P_0 attraverso r come quel punto che sta nella retta s passante per P_0 $\perp$ r e tale che

$$d(P_0, r) = d(P_1, r)$$



Modo più semplice per trovare P_1 (simmetrico di P_0 attraverso r) è il seguente

(1) Trovo s unica retta passante per P_0 $\perp r$

(2) $Q = r \cap s$

(3) Considero un punto generico $P_1 \in s$ tale che

$$\frac{P_1 + P_0}{2} = Q$$

ossia Q è punto medio tra P_0 e P_1!

Retta simmetrica attraverso un punto

Sia P_0 un punto e r una retta

si definisca s retta simmetrica ad r rispetto a P_0 come quella retta $s \parallel r$

tale che

$$d(P_0, s) = d(P_0, r)$$

<u>Ossia</u> $r: ax+by+c=0$

$\Longrightarrow s: ax+by+c_1=0 \quad (c_1 = ?)$

imponendo $d(P_0, s) = d(P_0, r)$ otteniamo il valore di c_1 !

<u>Circonferenza</u>

Una circonferenza è il luogo dei punti nel piano equidistanti da un punto fisso (detto centro)

Quindi se $C = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ e $r > 0$

Ottengo $P = (x,y) \in$ circonf

$\Longleftrightarrow \quad d(P, C) = r$

$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2}$$

Equazione canonica di una circonferenza di raggio $r>0$ e centro (x_0, y_0)

Se svolgo

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = r^2$$

Ossia

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} \qquad (EC)$$

dove $\quad a = -2x_0 \qquad \left(x_0 = -\frac{a}{2} \right)$

$\qquad b = -2y_0 \qquad \left(y_0 = -\frac{b}{2} \right)$

$\qquad c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$

Ossia l'eqne di una circonferenza è descritta da un'eqne di 2° grado con coefficienti di grado massimo pari a 1

<u>Viceversa</u> se considero una eqne

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$\Longrightarrow$ essa descrive una circonferenza di centro

$$\left(-\frac{a}{2} , -\frac{b}{2} \right)$$

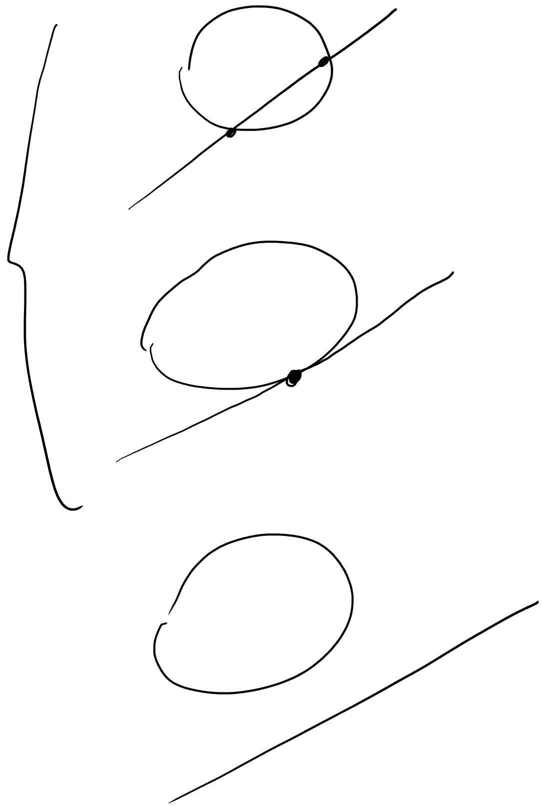
e di raggio $\quad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$

(affinché sia effettivamente una circonf. deve accadere $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} > c$)

Data una retta r e una circonf. Γ

del piano, allora può accadere

$r \cap \Gamma =$



due punti distinti

un solo punto

nessun punto

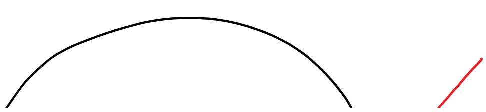
diciamo che la retta r è <u>tangente</u> alla circonferenza se l'intersezione è solo un punto

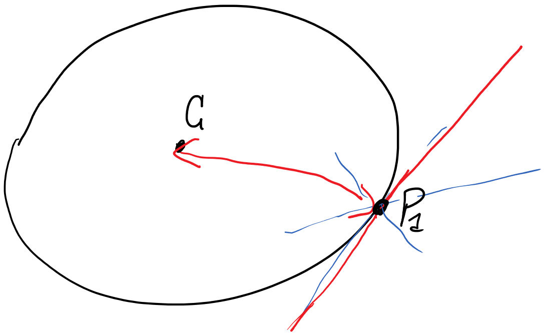
Sia Γ una circonferenza e $P_1 \in \Gamma$

come trovare retta tangente a Γ in P_1 ?

<u>modo 1</u> considero la retta generica passante per $P_1 = (x_1, y_1)$

$$\boxed{r : \; a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0}$$





Noto che r è tangente a Γ in P_1

$$\Longleftrightarrow \quad d(C, P_1) = d(C, r)$$

da cui la retta r !

<u>Esercizio</u> -

$$\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx$$

<u>Passo 2</u> $\quad \Delta = 4 - 4\cdot 2 < 0$

<u>Passo 3</u> Ricerca costanti

$$\boxed{\frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}}$$

$$= \frac{A(x^2-2x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+2)} =$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax+2A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2-2x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + (2A-C)}{(x-1)(x^2-2x+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=3 \\ 2A-C=-2 \end{cases}$$

$B = -A$

$\xrightarrow{2^e}$ $-2A + A + C = 3 \rightarrow$

$C = 3+A$

$\xrightarrow{3^e}$ $2A - (3+A) = -2$

$A = 1$ $\quad B = -1$ $\quad C = 4$

Passo 4 Sostituzione

$$\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-x+4}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= \lg|x-1| + \int \frac{-x+4}{x^2-2x+2}\,dx$$

A parte

$$\int \frac{-x+4}{x^2-2x+2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2(x-4)}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$\int (2x-2)$ ...

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)-6}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \int \frac{-6}{x^2-2x+2}\,dx\right]$$

Facile

$$= -\frac{1}{2}\left[\left[\int \frac{1}{z}\,dz\right]_{z=x^2-2x+2} - 6\int \frac{1}{x^2-2x+2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\lg|z| + 3\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\lg|x^2-2x+2| + 3\underbrace{\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx}$$

A parte $\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}$

Se $\begin{pmatrix} z = x-1 \\ dz = 1\cdot dx \end{pmatrix} \overset{1^\circ \text{sost}}{=\!=} \left[\int \frac{1}{z^2+1}\,dz\right]_{z=x-1}$

$$= \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg}(x-1)$$

<u>Esercizio</u> $\int \frac{dx}{x^2(x^2+2)^2}$

<u>Passo 3</u> Ricerca cost.

Passo 3 Ricerca cost.

$$\boxed{\frac{1}{x^2(x^2+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}}$$

$$= \frac{Ax(x^2+2)^2 + B(x^2+2)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+2) + (Ex+F)x^2}{x^2(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{Ax(x^4+4x^2+4) + B(x^4+4x^2+4) + (Cx^3+Dx^2)(x^2+2) + Ex^3 + Fx^2}{x^2(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{Ax^5 + 4Ax^3 + 4Ax + Bx^4 + 4Bx^2 + 4B + Cx^5 + 2Cx^3 + Dx^4 + 2Dx^2 + Ex^3 + Fx^2}{x^2(x^2+2)}$$

$$= \frac{(A+C)x^5 + (B+D)x^4 + (4A+2C+E)x^3 + (4B+2D+F)x^2 + (4A)x + 4B}{x^2(x^2+2)}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 4A+2C+E=0 \\ \dots \end{cases}$$

$A=0$ $\quad$ $C=0$

$B = 1/\dots$ $\quad$ $2°$ $\quad$ $D = -1/\dots$

$$\begin{cases} 4A+2C+E=0 \\ 4B+2D+F=0 \\ 4A=0 \\ 4B=1 \end{cases} \rightarrow B=\frac{1}{4}$$

2° $D=-\frac{1}{4}$

3° $E=0$

4° $1+2\left(-\frac{1}{4}\right)+F=0$

$$F=-\frac{1}{2}$$

Passo 4

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+2)^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2} + \left(-\frac{1}{4}\right)\int\frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x^2+2)^2}$$

A parte

$$\int\frac{1}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x}$$

$$\int\frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\frac{x^2}{2}+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$z=\frac{x}{\sqrt{2}}$

$dz=\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{\dots}$$

1° sost

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \int \frac{\cdots}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dz}{z^2+1} \Big]_{z=\frac{x}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} z =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}\right]$$

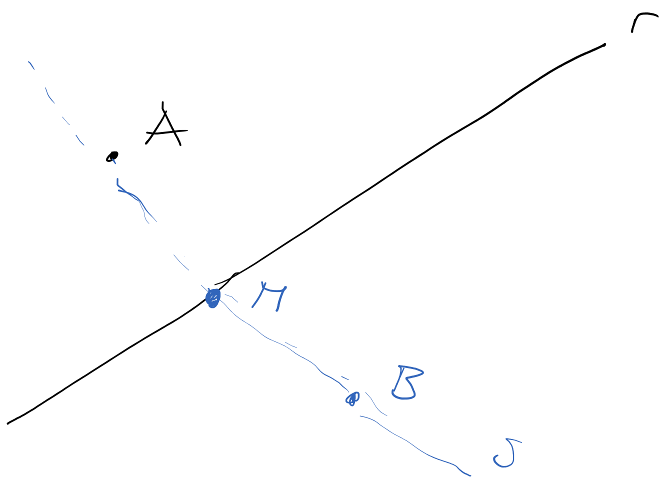
Esercizio (16 Aprile 2025)

Siano $A=(0,4)$ e retta $r: x+2y+2=0$

Trovare
(1) Punto B simmetrico ad A risp. a r
(2) Eq.ne della circonferenza Γ di centro A e tangente alla retta r

Svolgimento.

(1)



Considero l'eq.ne retta s passante per $A \perp r$

$$r: x + 2y + 2 = 0$$

$$r \perp s \iff \boxed{1 \cdot a + 2 \cdot b = 0}$$

$r: \quad x + 2y + 2 = 0$

$r \perp s \iff \boxed{1 \cdot a + 2 \cdot b = 0}$

$s: \quad ax + by + c = 0$

$b = -\frac{a}{2}$

$a \cdot x - \frac{a}{2} y + c = 0$

divido per a $\Rightarrow$ $\boxed{s: x - \frac{1}{2} y + c_1 = 0}$

Impongo che $A \in s$ $\rightarrow$ $\boxed{0 - \frac{1}{2} \cdot 4 + c_1 = 0}$

da cui $c_1 = 2$

$\Rightarrow \boxed{s: \quad x - \frac{1}{2} y + 2 = 0}$

$M = s \cap r: \quad \begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ x - \frac{1}{2} y + 2 = 0 \end{cases}$

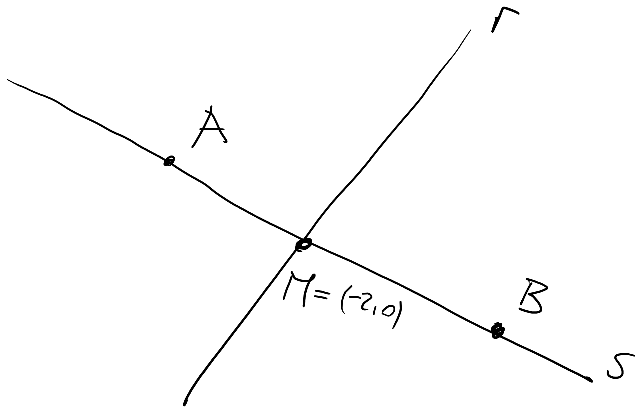
Uso Cramer $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$

$x = \dfrac{\det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}{-\frac{5}{2}} \qquad y = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{-\frac{5}{2}}$

$x = \dfrac{1 + 4}{-\frac{5}{2}} \qquad y = \dfrac{-2 + 2}{-\frac{5}{2}} = 0$

$x = -2 \qquad\qquad y = 0$

$\Longrightarrow \quad M = (-2, 0) \in s \cap r$



$B = (x, y) \in s$

$\iff \quad x - \frac{1}{2} y + 2 = 0$

$\iff \quad x = \frac{1}{2} y - 2$

$B = \left(\frac{1}{2} y - 2 , y \right)$ punto generico di s

B soddisfa l'eqne

$$\frac{A + B}{2} = M = (-2, 0)$$

$$\frac{(0,4) + \left(\frac{1}{2} y - 2 , y \right)}{2} = (-2, 0)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2} y - 2 , 4 + y \right)}{2} = (-2, 0)$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2} y - 2}{2} , \frac{4+y}{2} \right) = (-2, 0)$$

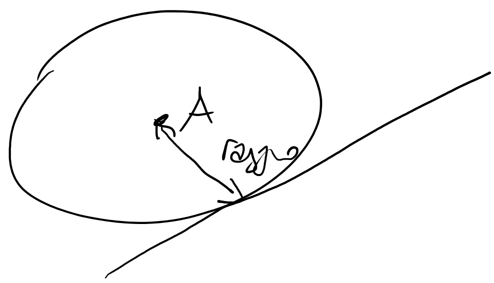
$$\left(\frac{\ldots}{2}, \frac{\ldots}{2} \right) = (-2, 0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}y - 2}{2} = -2 \\[2mm] \dfrac{4+y}{2} = 0 \longrightarrow y = -4 \end{cases}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot(-4) - 2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{ok}$$

$$\Longrightarrow B = \left(\tfrac{1}{2}y - 2, y \right) = \left(\tfrac{1}{2}(-4) - 2, -4 \right)$$
$$= (-4, -4)$$

(2) circonf. centro $(0,4)$ e tangente ar



$$\text{raggio} = d(A, r)$$

$$= \frac{|1\cdot 0 + 2\cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$M : \boxed{(x-0)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

Esercizio

$$\begin{cases} x+y+3z=3 \\ 2x+2y+\lambda z=6 \\ x \qquad +z=3 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & \lambda & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -1\det\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0$$

$$= -(2-\lambda)+2(1-3) = \lambda-2+2-6$$

$$= \lambda-6$$

Se $\lambda \neq 6 \Rightarrow$ rango $A=3=$ rango A'

$\Rightarrow$ 1 sola soluzione

Tale soluzione è

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & \lambda \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\lambda-6} \qquad y=\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & \lambda \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{\lambda-6}$$

$$z=\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{}$$

$\lambda - 6$

caso $\lambda = 6$ $\longrightarrow$ $\boxed{\det A = 0}$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x + 2y + 6z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{1°} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det 1° = \det \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 0$$

$$= (18 - 6) - 2(9 - 3) = 12 - 2(6)$$

$$= 0$$